MEMBINA PERISIAN UNTUK ALIRAN YANG MELALUI JASAD

Rosli Abu Bakar dan Wong Chee Yeen

Universiti Teknologi Malaysia
Fakulti Kejuruteraan Mekanikal, Jabatan Aeronautik & Automotif
81300 UTM Skudai, Johor, Malaysia
Tel: 60-07-5504752/5505247, Fax: 60-07-5566159
E-mail : rosliab@fkm.utm.my

ABSTRAK

Kajian ini bertujuan membina perisian yang mampu memberikan gambaran aliran yang melalui jasad. Penyelesaian persamaan Navier Stokes dua dimensi digunakan bagi kaedah berangka pembezaan terhingga dan algoritma SIMPLE (Semi Implicit Method Pressure Link Equation). Kajian dilakukan menentukan bentuk aliran yang melintasi jasad yang berbentuk segi empat sahaja. Keputusan kajian ini memperolehi taburan nilai halaju menegak (v), halaju melintang (u) dan tekanan yang sepadan (p). Pada keadaan yang telah ditentukan, keputusan diplot untuk menunjukkan kontur tekanan dan panduan halaju. Kajian ini dijalankan dalam beberapa keadaan seperti perubahan halaju aliran masuk, bilangan jasad yang dilalukan oleh aliran dan perubahan saiz saluran.

1.0 PENGENALAN

Persamaan Navier Stokes adalah persamaan yang dirumuskan daripada keadaan fizikal aliran bendalir berasaskan Hukum Kedua Newton. Persamaan Navier Stokes memainkan peranan yang sangat meluas dalam kehidupan seharian terutamanya dalam bidang kejuruteraan. Kajian menunjukkan penyelidikan pergerakan bendalir telah mula dibuat sejak awal abad ke-19. Pada ketika itu, persamaan yang digunakan terdiri daripada persamaan tak likat Euler. Rumusan persamaan tersebut telah dikembangkan secara berterusan di samping peningkatan penyelidikan secara ujikaji.

Di awal 1800an, Navier (1823) dan Stokes (1845) telah menambahkan unsur kelikatan ke atas persamaan tak likat Euler dan menjadikannya kepada persamaan likat. Di dalam persamaan likat ini, terdapat kelikatan yang sebelum itu diabaikan. Akhirnya persamaan ini lebih dikenali sebagai persamaan Navier Stokes.

Keadaan yang tak linear dalam persamaan Navier Stokes dan rumusan matematik yang wujud menyebabkan persamaan analisis menjadi lebih sukar. Bagi menyelesaikan masalah ini, penganalisaan secara berangka telah dikembangkan.

Perkembangan dan penggunaan komputer dalam penyelesaian berangka persamaan-persamaan Navier Stokes telah dibuat sejak lebih 5 dekad yang lalu. Namun begitu, penulisan penting dalam simulasi berangka untuk aliran hanya wujud dalam dekad kebelakangan ini. Di antara perkara-perkara yang penting ialah keperluan asas kefahaman perhubungan di antara masalah fizikal dengan aturan kaedah berangka atau algoritma yang digunakan untuk penyelesaian.

Dengan kemajuan peralatan elektronik, beberapa rumusan pembezaan terhingga dan analisa unsur untuk persamaan-persamaan Navier Stokes telah diperkenalkan. Semua rumusan tersebut dapat disenaraikan kepada 2 kategori yang utama :

1. Rumusan pembolehubah asal (u, v dan p)

2. Vektor potential dan vortesiti.

Suhu adalah pembolehubah tambahan dalam kedua-dua bentuk rumusan itu. Penyelesaian yang dibuat dalam kajian ini adalah dalam bentuk rumusan pembolehubah asal. Akibat penggunaan pembolehubah asal, kesulitan akan timbul ketika menentukan keadaan sempadan bagi tekanan dan halaju untuk memenuhi persamaan keterusan. Oleh demikian, kajian ini menggunakan algoritma SIMPLE sebagai kaedah penyelesaian.

2.0 TEORI DAN PERSAMAAN

2.1 Persamaan Keterusan

Persamaan keterusan diasaskan daripada persamaan keabadian jisim bendalir yang menunjukkan keseimbangan jisim bendalir yang masuk dan meninggalkan satu isipadu elemen dalam medan aliran. Untuk memudahkan analisa, kita menganggapkan aliran mantap dan dua dimensi (*dz=1*) dengan komponen halaju $u \equiv u\ (x,y)$ dan $v \equiv v\ (x,y)$ dalam arah x dan y masing-masing. Persamaan pengabadian jisim boleh dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} \textit{Kadar bersih aliran} \\ \textit{jisim yang masuk ke} \\ \textit{dalam isipadu elemen} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Kadar bersih aliran} \\ \textit{jisim yang keluar ke} \\ \textit{dalam isipadu elemen} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Kadar bersih aliran} \\ \textit{jisim yang masuk ke} \\ \textit{dalam isipadu elemen} \end{bmatrix} = udy(1) + vdx(1) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Kadar bersih aliran} \\ \textit{jisim yang keluar ke} \\ \textit{dalam isipadu elemen} \end{bmatrix} = \left\{u + \frac{\partial u}{\partial x}(dx)\right\}dy(1) + \left\{v + \frac{\partial v}{\partial y}(dy)\right\}dx(1) \tag{3}$$

Menyamakan persamaan (2) dan persamaan (3), maka

$$udy + vdx = \left\{u + \frac{\partial u}{\partial x}(dx)\right\}dy + \left\{v + \frac{\partial v}{\partial y}(dy)\right\}dx$$

$$udy + vdx = udy + \frac{\partial u}{\partial x}(dxdy) + vdx + \frac{\partial v}{\partial y}(dydx)$$

Menyusunkan semua sebutan di sebelah kanan, maka

$$\frac{\partial u}{\partial x}(dxdy) + \frac{\partial v}{\partial y}(dxdy) = 0$$

Membahagikan persamaan dengan *(dxdy)*, maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

Persamaan (4) dikenali sebagai **Persamaan Keterusan**.

2.2 Persamaan Momentum

Persamaan momentum diterbitkan dari Hukum Kedua Newton yang menyatakan pecutan masa jisim dalam arah rujukan bersamaan dengan percampuran daya-daya dalam arah rujukan tersebut. Daya yang bertindak ke atas elemen bendalir dalam medan aliran adalah terdiri daripada daya jasad dan daya permukaan. Daya jasad mungkin dihasilkan oleh beberapa kesan seperti graviti, elektrik dan medan magnet yang bertindak ke atas bendalir jasad. Manakala daya permukaan dihasilkan oleh tindakan tegasan ke atas permukaan elemen isipadu. Untuk aliran dua dimensi, mantap dan tak boleh mampat, persamaan momentum bagi jisim, *dm* adalah

$$dF = dm\left.\frac{dV}{dt}\right)_{sistem}$$

= daya yang bertindak pada jisim, *dm* dengan pecutan *dV/dt*

Dari persamaan

$$\left.\frac{dV}{dt}\right)_{sistem} = \frac{DV}{Dt} = u\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + v\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial t}$$

jadi

$$dF = dm\left[u\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + v\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial t}\right]$$

Daya yang bertindak pada arah x dan y,

$$\begin{aligned} dF_x &= dm\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ dF_y &= dm\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Suatu unsur bendalir dua dimensi $(dz=1)$ yang berukuran dx dan dy, maka daya yang bertindak pada unsur tersebut terdiri daripada daya badan dan daya permukaan (daya dalam arah tangen dan tegak lurus). Sekiranya daya permukaan arah x pada pusat unsur tersebut diambil sebagai σ_{xx} dan τ_{yx}, maka daya pada semua permukaan diperolehi dengan menggunakan siri Taylor berdasarkan **Rajah 1**.

ΣdF_{sx} :

$$\begin{aligned} dF_{sx} &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy(1) - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy(1) \\ &\quad + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx(1) - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx(1) \end{aligned}$$

ΣdF_{sy} :

$$\begin{aligned} dF_{sy} &= \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx(1) - \left(\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx(1) \\ &\quad + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy(1) - \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy(1) \end{aligned}$$

Setelah diringkaskan, hasilnya ialah

$$dF_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dxdy$$

$$dF_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dxdy$$

Dengan mempertimbangkan daya jasad, paduan daya dalam arah x dan y akan menjadi berikut :

$$dF_x = dF_{sx} + dF_{bx} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dxdy$$

$$dF_y = dF_{sy} + dF_{by} = \left(\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dxdy$$

Dengan memasukkan dF_x dan dF_y ke dalam persamaan (5) dan menggantikan dm dengan $\rho dxdy(1)$, maka persamaan momentum dalam bentuk kebezaan adalah seperti berikut :

$$\left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dxdy = \rho dxdy \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\left(\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dxdy = \rho dxdy \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Membahagikan persamaan dengan ($dxdy$), maka

$$\begin{aligned} \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \frac{Du}{Dt} \\ \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho \frac{Dv}{Dt} \end{aligned} \tag{6}$$

Persamaan (6) dikenali sebagai **Persamaan Momentum**.

2.3 Persamaan Navier Stokes

Persamaan Navier Stokes merupakan persamaan momentum dalam bentuk umum dan diperolehi dari persamaan (6) setelah penyataan tegasan dimasukkan. Ia sah bagi aliran tak boleh ataupun yang boleh mampat, likat atau tak likat. Bagi bendalir Newtonan tak boleh mampat dan tak likat tegasan di atas dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\sigma_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu\nabla.\overline{U} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu\nabla.\overline{U} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned} \tag{7}$$

dengan p ialah tekanan termodinamik setempat dan

$$\nabla.\overline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{8}$$

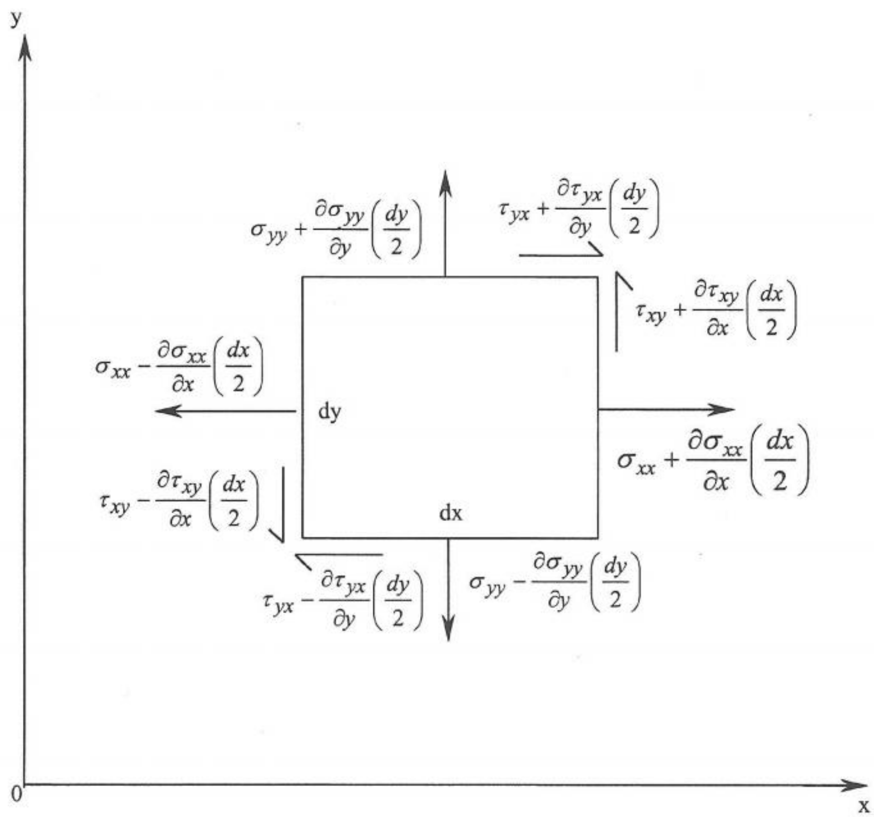
Memasukkan hubungan (7) dan (8) ke dalam persamaan (6), maka

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla.\overline{U}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla.\overline{U}\right)\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

Bagi aliran tak boleh mampat dengan kelikatan malar, persamaan (9) dapat disederhanakan ke bentuk

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Persamaan (10) lebih dikenali sebagai **Persamaan Navier Stokes**.



Rajah 1 Elemen untuk menerbitkan persamaan momentum.

3.0 ALGORITMA SIMPLE

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) adalah suatu kaedah yang digunakan untuk menyelesaikan pengiraan dalam aliran. Kaedah ini terdiri daripada siri ramalan dan operasi pembetulan yang menghubungkan tekanan dan halaju. Aturan ini menentukan bahawa langkah awal akan diselesaikan terlebih dahulu bagi semua angkali dalam persamaan beza terhingga dan ia adalah tetap sebelum langkah yang selanjutnya, iaitu ramalan nilai medan tekanan. Kemudian persamaan momentum akan diselesaikan. Nilai halaju tekaan yang diperolehi masih belum memenuhi persamaan keterusan. Dengan itu, ia memerlukan satu lagi persamaan yang dikenali sebagai persamaan pembetulan halaju.

Secara amnya, operasi kaedah SIMPLE dapat disusun seperti berikut :

1. Ramalkan medan tekanan, p^*.
2. Selesaikan persamaan momentum dalam arah x dan y untuk mencari u^* dan v^*.
3. Selesaikan persamaan untuk p'.
4. Kirakan tekanan, p daripada persamaan $p = p' + p^*$.
5. Kirakan halaju u dan v dengan menggunakan persamaan pembetulan halaju.
6. Anggapkan p yang dikira tadi sebagai p^* yang baru. Ulangi langkah 2 sehingga nilai halaju u dan v yang diperolehi memenuhi persamaan keterusan.

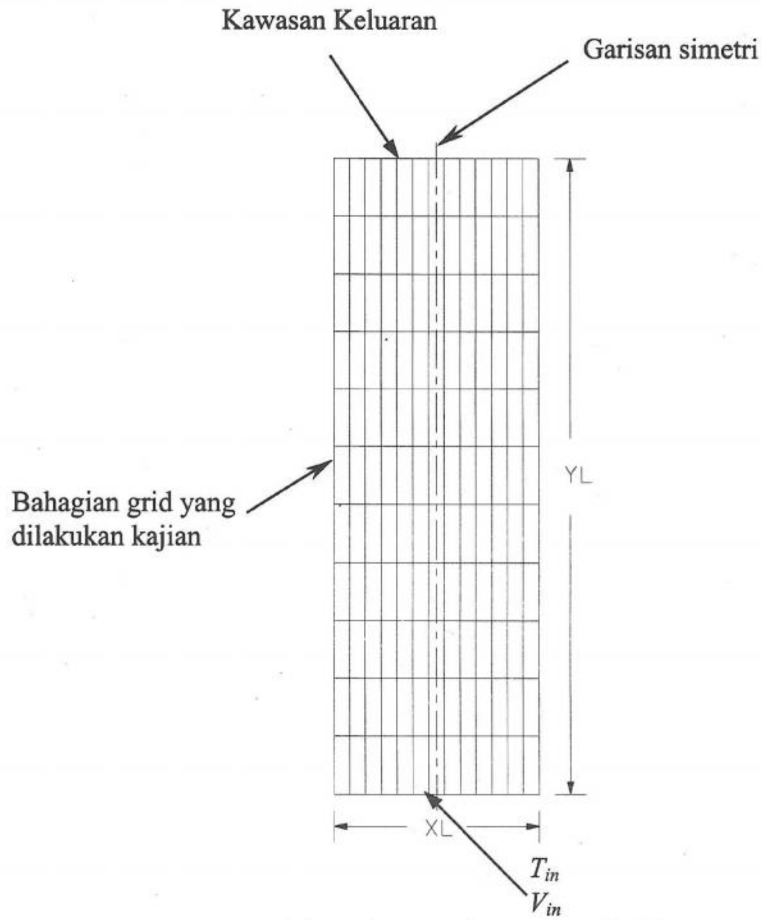
4.0 KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

Perisian komputer yang dibina telah dimasukkan dengan beberapa set data masukan yang berbeza untuk memperolehi medan aliran halaju dan taburan tekanan pada keadaan yang tertentu. Keadaan yang akan dipertimbangkan dalam kajian adalah seperti yang ditunjukkan dalam **Jadual 1**. Untuk mengukuhkan lagi keputusan, taburan suhu juga merupakan satu keluaran yang akan dikaji. Ini adalah kerana didapati bahawa suhu yang berbeza akan mempengaruhi aliran dalam saluran yang tertutup.

Sebelum penyelesaian tersebut dilakukan, keadaan-keadaan sempadan yang diambil adalah seperti berikut :

1. Isoterma atau sesuhu untuk seluruh dinding kecuali pada kawasan masuk.
2. Nilai halaju pada keadaan sempadan adalah sifar.
3. Nilai halaju pada masukan adalah tetap.

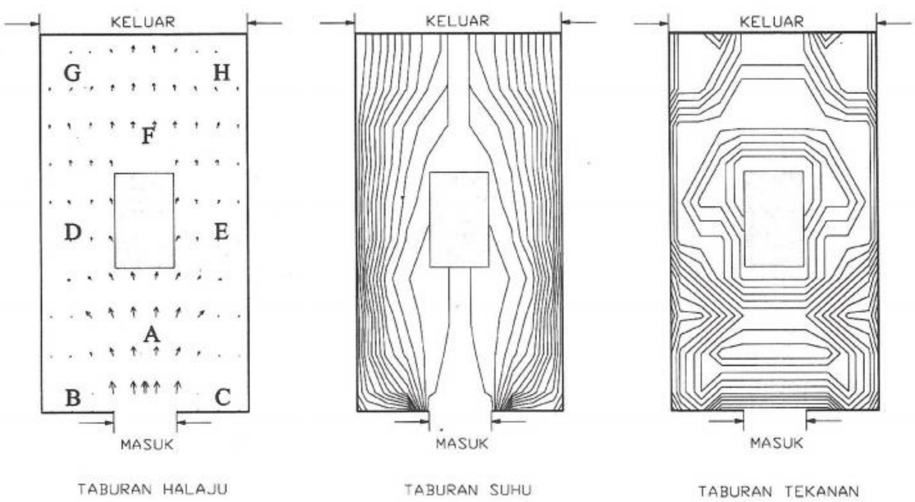
4. Pengiraan hanya dilakukan pada satu sebelah saluran sahaja kerana ia adalah simetri.



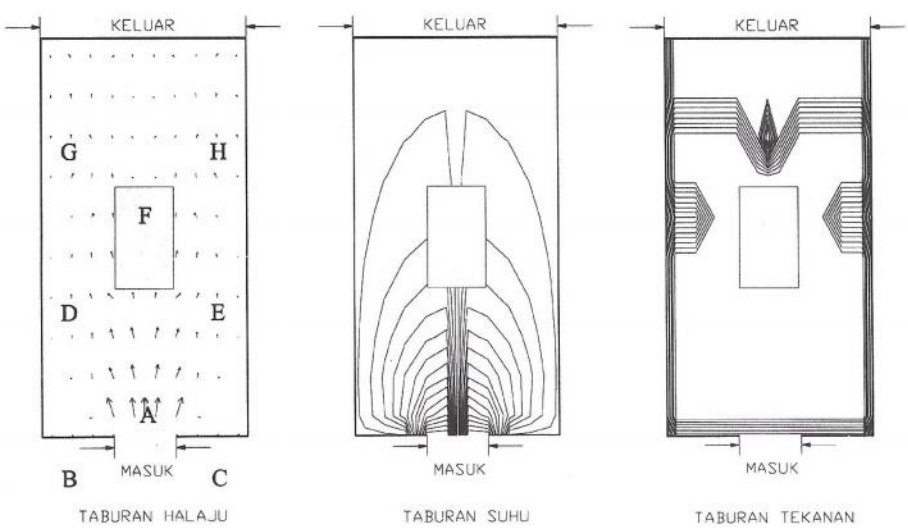
Rajah 2 Elemen saluran yang dikaji.

Jadual 1 Keadaan yang dikaji

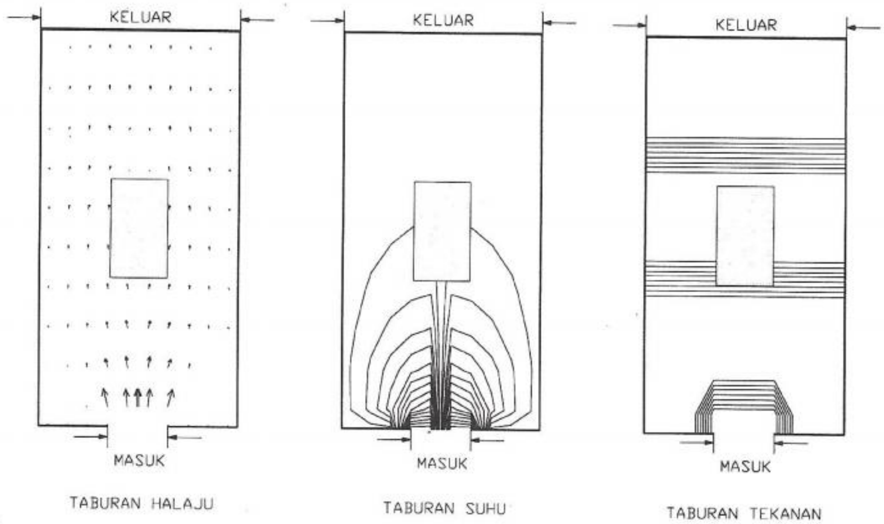
Bilangan Set Data	Lebar, *XL*	Panjang, *YL*	Bilangan grid pada *x*	Bilangan grid pada *y*	Bilangan jasad	Suhu dinding, T_w	Suhu masuk, T_{in}	Halaju masuk, V_{in}
1	1.0	2.0	14	12	1	300.0	500.0	100.0
2	1.0	2.0	14	12	1	300.0	500.0	10.0
3	1.0	2.0	14	12	1	300.0	500.0	1.0
4	1.0	2.0	14	12	1	300.0	500.0	500.0
5	1.0	4.0	14	12	1	300.0	500.0	100.0
6	1.0	2.0	14	12	3 *(tempat berbeza)*	300.0	500.0	100.0
7	1.0	2.0	14	12	5 *(tempat berbeza)*	300.0	500.0	100.0
8	1.0	2.0	14	12	1 *(saiz berbeza)*	300.0	500.0	100.0
9	1.0	2.0	14	12	1	300.0	3000.0	100.0
10	1.0	2.0	14	12	1	3000.0	500.0	100.0
11	1.0	2.0	14	12	1	300.0	300.0	100.0
12	1.0	2.0	14	12	1	3000.0	3000.0	100.0



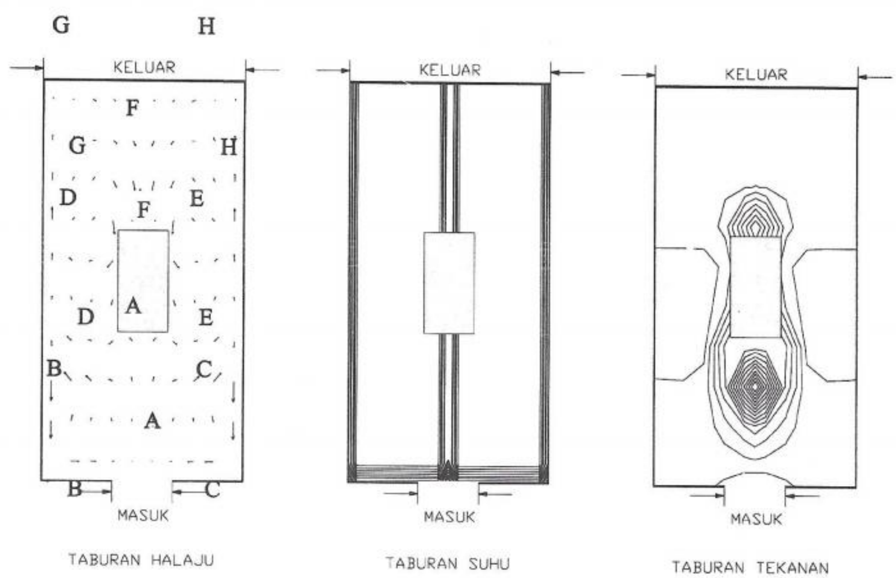
Rajah 3 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 1



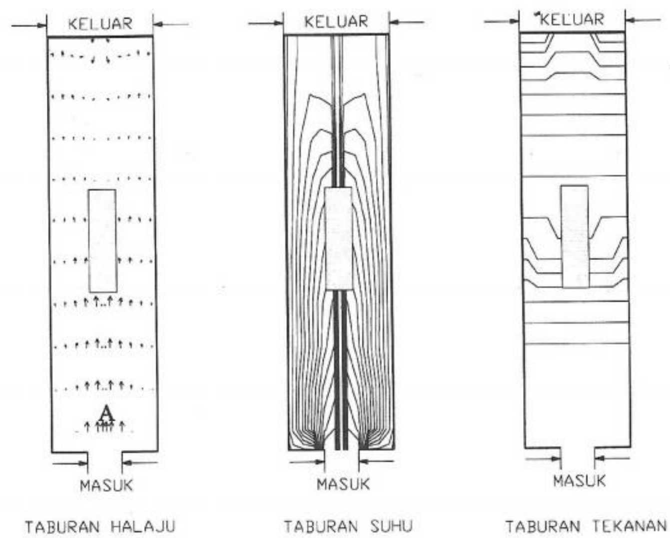
Rajah 4 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 2



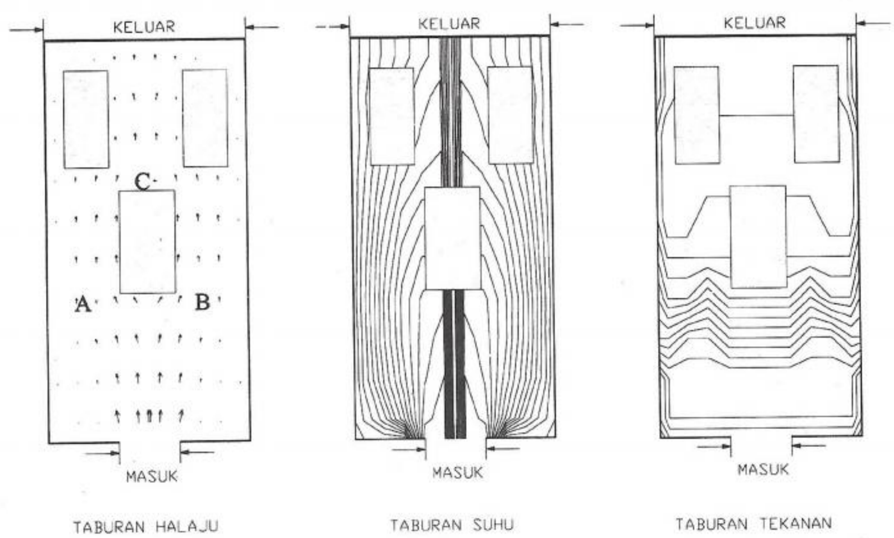
Rajah 5 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 3



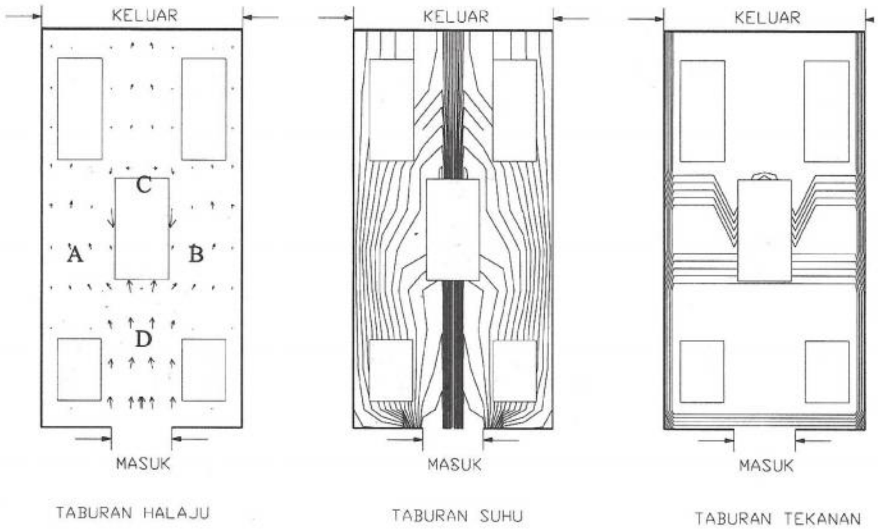
Rajah 6 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 4



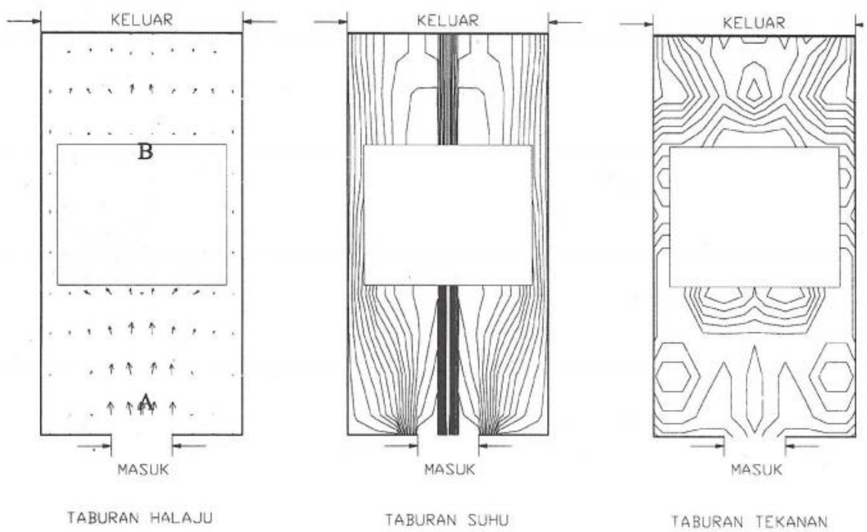
Rajah 7 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 5



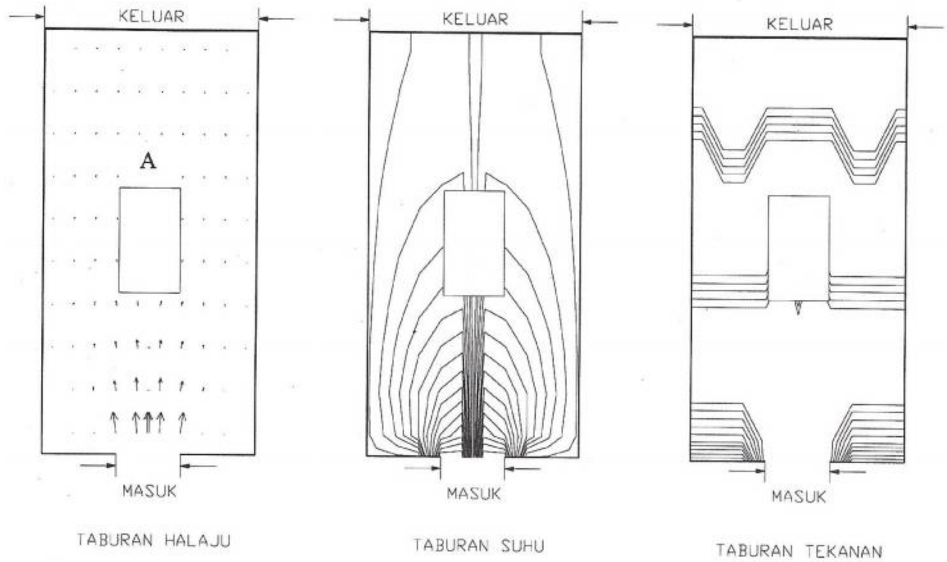
Rajah 8 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 6



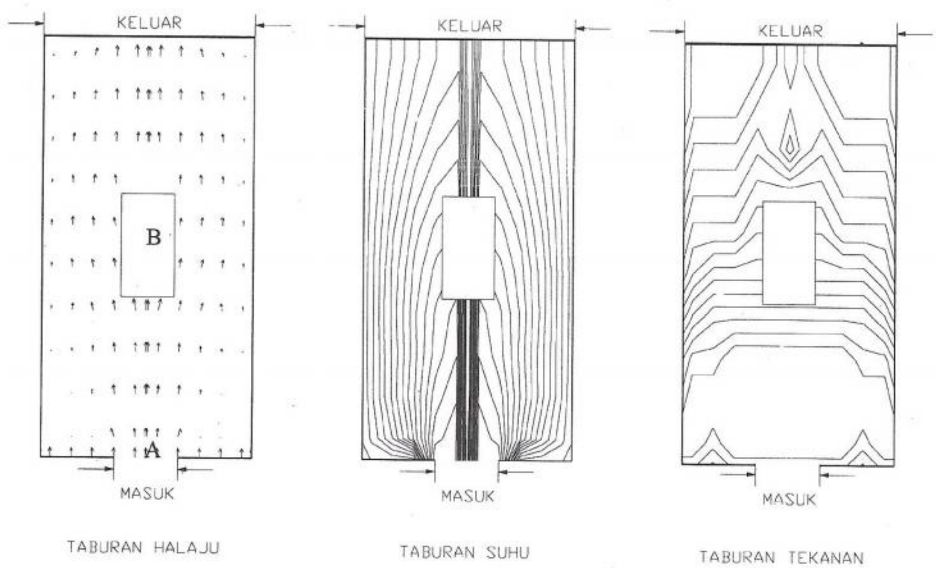
Rajah 9 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 7



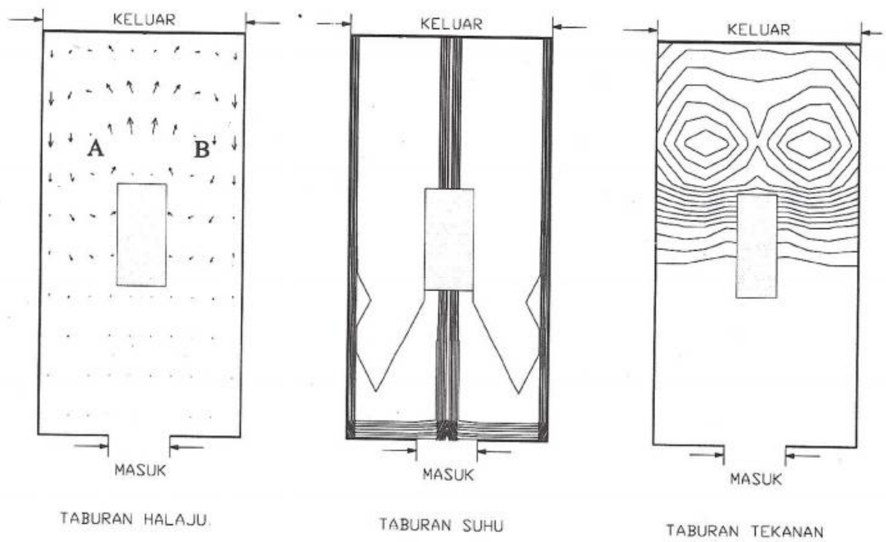
Rajah 10 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 8



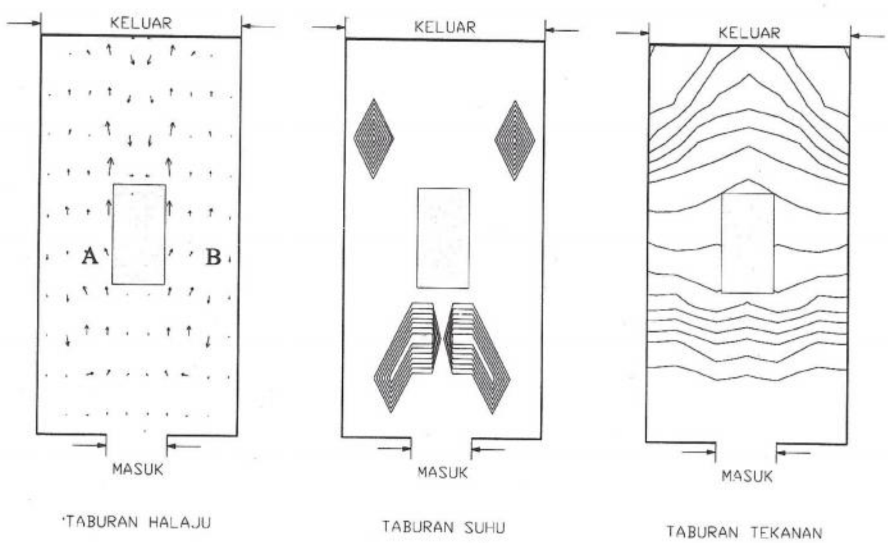
Rajah 11 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 9



Rajah 12 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 10



Rajah 13 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 11



Rajah 14 Taburan halaju, suhu dan tekanan untuk set data 12